Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Puntaje	Nota

---

1) Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (y, z - x, -y)$ y C la curva de intersección de $z = ax + by$ con $x^2 + y^2 = 1$. Se pide:

   a) [**10pt**] Encuentre los valores de a y b tal que $\int_C F\, dr = 0$ y $a^2 + b^2 = 1$

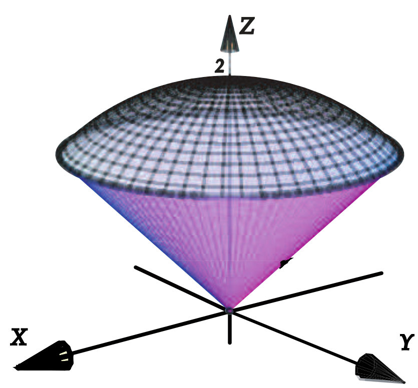
   b) [**10pt**] Con los valores de a y b encontrados en la parte b) verifique el Teorema de Stokes

2) [**15pt**] Determine el valor de $\int_C \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}\, dx + \sqrt{1+x^2}\, dy$ en los siguientes casos:

   a) Trazo rectilíneo que une $(0, 1)$ con $(1, 2)$

   b) C la curva $x^2 + y^2 = 16$

3) [**25pt**] Sea E la frontera del sólido Q limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, como se muestra en la figura. Si $F = (2x, 2y, 2z)$, verificar el Teorema de la divergencia.



1) a)
- $r(t) = (\cos t, \sin t, a\cos t + b\sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

3 puntos

- $r'(t) = (-\sin t, \cos t, -a\sin t + b\cos t)$
- $F(r(t)) = (\sin t, (a-1)\cos t + b\sin t, -\sin t)$
- $F(r(t)) \cdot r'(t) = -\sin^2 t + (a-1)\cos^2 t + b\sin t\cos t + a\sin^2 t - b\sin t\cos t = a - 1$

3 puntos

Por lo que

$$\int_C F\,dr = \int_0^{2\pi} (a-1)\,dt = 2\pi(a-1)$$

Así $\displaystyle\int_C F\,dr = 0$ cuando $a = 1$. Además como $a^2 + b^2 = 1$ tenemos que $b = 0$

2+2 puntos

b) Tenemos que para los valores encontrado en la parte a) $\displaystyle\int_C F\,dr = 0$. Ahora

- $rot(F) = (-2, 0, -2)$
- $N = (-1, 0, 1)$

5 puntos

Luego

$$\int_C F\,dr = \int_S rot \cdot N\,dS = \int_S 0\,dS = 0$$

5 puntos

2) $P = \dfrac{xy}{1+x^2}, \quad Q = \sqrt{1+x^2}$

Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

se tiene que F es conservativo. Luego una función potencial para F es $\varphi(x,y) = y\sqrt{1+x^2}$

5 puntos

a) $\varphi(1,2) - \varphi(0,1) = 2\sqrt{2} - 1$

5 puntos

b) El resultado es cero ya que se trata de una curva cerrada en un campo conservativo.

5 puntos

3) Por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\iint_S F\,dS = \iiint_Q 6\,dV = \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} 6\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\alpha}_{6pt} = \underbrace{8\pi\sqrt{2} - 8\pi}_{5pt}$$

Directamente tenemos:

- S_1 : parte del cono $r(u,v) = (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$ con (u,v) en el círculo de radio 1.
- $r_u = \left(1, 0, \dfrac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right), \quad r_v = \left(0, 1, \dfrac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \Rightarrow N = \left(\dfrac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \dfrac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$
- $F(r(u,v)) = (2u, 2v, 2\sqrt{u^2+v^2})$

5 puntos

Por lo que

$$\iint_{S_1} F\,dS = \iint_{S_1} F(r(u,v)) \cdot N\,dS = \iint_{S_1} dS = 0$$

2 puntos

- S_2 : parte de la esfera
  $r(\varphi, \alpha) = (\sqrt{2}\cos\alpha\sin\varphi, \sqrt{2}\sin\alpha\sin\varphi, \sqrt{2}\cos\varphi), \varphi \in [0, \pi/4], \alpha \in [0, 2\pi]$
- $r_\varphi = (\sqrt{2}\cos\alpha\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\alpha\cos\varphi, -\sqrt{2}\sin\varphi)$
- $r_\alpha = (-\sqrt{2}\sin\alpha\sin\varphi, \sqrt{2}\cos\alpha\sin\varphi, 0)$
- $N = (2\cos\alpha\sin^2\varphi, 2\sin\alpha\sin^2\varphi, 2\cos\varphi\sin\varphi)$
- $F(r(\varphi,\alpha)) \cdot N = 4\sqrt{2}\sin\varphi$

5 puntos

Por lo que

$$\iint_{S_2} F\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} 4\sqrt{2}\sin\varphi \, d\varphi \, d\alpha = 8\pi\sqrt{2} - 8\pi$$

2 puntos

Así $\displaystyle\iint_S F\,dS = \iint_{S_1} F\,dS + \iint_{S_2} F\,dS = 8\pi\sqrt{2} - 8\pi$